

*Olimpiadas  
de Matemáticas*

*Vigésimo sexta  
Olimpiadas de Matemáticas*

*Soluciones a los Problemas*

*Nivel Intermedio*

*Jueves 4 de Abril de 2014*

*Río Piedras, Puerto Rico*



ESTADO LIBRE ASOCIADO DE  
PUERTO RICO  
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

1. Los estudiantes de 8vo grado escriben números de tres dígitos diferentes usando los dígitos 2, 3, 6 y 7. Mary escoge el mayor, Luis escoge el menor. Martín escogió la suma los dos números. ¿Cuál número escogió Martín?

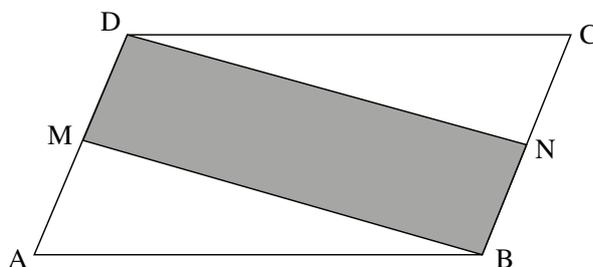
*The students of the 8th grade write three-digit numbers with different digits using the digits 2, 3, 6 and 7. Mary chooses the greatest. Luis chooses the smallest. Martin sums these two numbers. Which number did Martin get?*

### Solución

Tenemos los dígitos 2, 3, 6 y 7, el número mayor que se puede formar con estos dígitos es 763 y el menor es 236 que corresponden a los números escogidos por Mary y Luis respectivamente. El número escogido por Martín es la suma de los números escogidos por Mary y Luis, por lo tanto el número escogido por Martin es  $763 + 236 = 999$ .

2. El área del paralelogramo  $ABCD$  es 10. Los puntos  $M$  y  $N$  son puntos medios de los lados  $AD$  y  $BC$  respectivamente. Encuentre el área del cuadrilátero  $MBND$ .

*The area of parallelogram  $ABCD$  is 10. Points  $M$  and  $N$  are midpoints of sides  $AD$  and  $BC$  respectively. Find the area of quadrilateral  $MBND$ .*



### Solución

Note que los triángulos  $BDC$  y  $DBA$  que se forman de este paralelogramo son congruentes, por lo tanto el área de cada uno de estos triángulos es 5. Como los puntos  $M$  y  $N$  son puntos medios de los lados  $AD$  y  $BC$ , entonces el área sombreada de cada uno de los triángulos corresponde a la mitad del área de cada triángulo, por lo tanto el área del cuadrilátero  $MBND$  es  $2.5 + 2.5 = 5$ .

3. Determine la suma de los dígitos del resultado de la multiplicación  $\underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101$

*Determine the sum of the digits of the product  $\underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101$*

**Solución**

La multiplicación  $\underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101$  puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101 &= \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 100 + \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \\ \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101 &= \underbrace{111 \dots 11}_{2014} 00 + \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \\ \underbrace{111 \dots 11}_{2014} \times 101 &= 11 \underbrace{22 \dots 22}_{2012} 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto la suma de los dígitos del resultado de la multiplicación viene dado por  $(2 \times 2012) + 4 = 4028$

4. ¿Cuál es el promedio de 7 números si el promedio de los dos primeros es 9 y el promedio de los 5 últimos es 16?

*What is the average of 7 numbers if the average of the first two is 9 and the average of the last five is 16?*

**Solución**

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_7$  los números a los cuales se les desea calcular el promedio. Como el promedio de los dos primeros números es 9 entonces,  $x_1 + x_2 = 18$ , por otro lado, el promedio de los 5 últimos es 16 entonces,  $x_3 + x_4 + \dots + x_7 = 80$ , por lo tanto, el promedio de los 7 números viene dado por:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7}{7} = \frac{18 + 80}{7}$$

De donde obtenemos que el promedio de los 7 números es 14.

5. La suma de dos números naturales es 91 y su diferencia es 15. ¿Qué tan grande es su producto?

*The sum of two natural numbers is 91 and their difference is 15. How big is their product?*

**Solución**

Sean  $a$  y  $b$  los números, por lo tanto

$$a + b = 91$$

$$a - b = 15$$

De la segunda ecuación se tiene que  $a = 15 + b$ , luego en la primera ecuación, tenemos que  $(15 + b) + b = 91$ , de donde  $b = 38$  y así encontramos que  $a = 53$ . Como  $a = 53$  y  $b = 38$  entonces el producto de ellos será 2014.

6. 100 árboles crecen a lo largo de un lado de la calle. Cada tercer árbol es un roble y cada quinto árbol es una ceiba o un roble. El resto de árboles son álamos. ¿Cuántos álamos crecen en este lado de la calle?

*100 trees grow along one side of the street. Each third tree is an oak and each fifth is a ceiba or an oak. The remaining trees are poplars. How many poplars grow on this side of the street?*

**Solución**

Dado que cada tercer árbol es de roble entonces, tenemos que los robles están en todos los múltiplos de 3. Como el máximo múltiplo de 3 menor que 100 es 99, entonces tenemos que hay 33 múltiplos de 3, es decir hay 33 robles. Como cada quinto árbol es de ceiba o roble en los múltiplos comunes entre 3 y 5 que son 15, 30, 45, 60, 75 y 90 vamos a encontrar un árbol de roble, de modo que en los múltiplos restantes de 5 habría un árbol de ceiba o roble. Por lo tanto hay  $33 + 14 = 47$  árboles de roble o ceiba, como los restantes son álamos entonces hay  $100 - 47 = 53$  árboles de álamo.

7. ¿Cuántos triángulos de lados con longitudes diferentes pueden formarse escogiendo tres segmentos de longitudes 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm o 7cm?

*How many triangles with sides of different lengths can be composed choosing three segments of lengths 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm or 7cm?*

### **Solución**

Para que tres segmentos puedan formar un triángulo, cada lado debe ser estrictamente menor que la suma de los otros dos, teniendo esto en cuenta, notemos que con los segmentos de longitud 2cm, 3cm y 4cm se puede formar únicamente 1 triángulo. De la misma forma si tomamos los segmentos de longitudes 2cm y 4cm, 2cm y 5cm y 2cm y 6cm es posible formar un triángulo con cada uno, es decir que en total, usando el segmento de longitud 2cm, se pueden formar 4 triángulos. Ahora si tomamos el segmento de longitud 3cm podemos verificar que se pueden formar 5 triángulos. Si ahora tomamos el segmento de 4cm podemos verificar que se pueden formar 3 triángulos y finalmente si se toma fijo el segmento de 5cm solo se puede formar un triángulo.

Por lo tanto, en total se pueden formar  $4 + 5 + 3 + 1 = 13$  triángulos.

8. Un litro de limonada tiene 10% de extracto de jugo, 15% de azúcar y 75% de agua. Si se agrega un cuarto de litro que contiene 50% de agua y 50% de extracto de jugo. ¿Cuál es el porcentaje de azúcar resultante en la mezcla?

*One liter of lemonade has 10% of juice extract, 15% of sugar and 75% of water. If a quarter of a liter which contains 50% water and 50% juice extract is added, what is the percentage of sugar in the resulting mixture?*

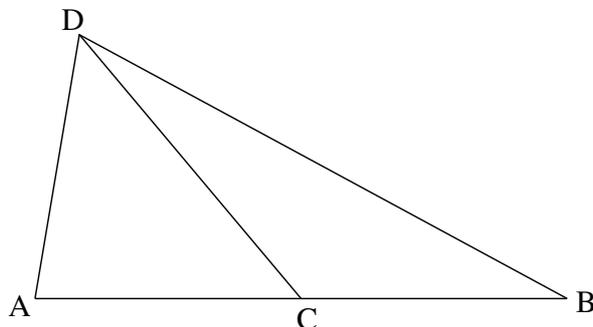
### **Solución**

Sea  $x$  la cantidad de azúcar que hay en el jugo. Si tomamos el litro de jugo, obtenemos que la cantidad de azúcar que hay por cada litro es  $0.15 \times 1 = 0.15$ , mientras que en el cuarto de litro que se le agregará al jugo no hay azúcar, así la cantidad de azúcar por litro es  $0 \times 0.25 = 0$ . Con esto podemos establecer la siguiente ecuación:

$$0.15 + 0 = 1.25x$$

de donde resolviendo para  $x$ , obtenemos que  $x = .12$ , así tenemos que la cantidad de azúcar en la mezcla final es del 12%.

9. En la figura  $AC = BC = CD$ , ¿cuál es la medida del  $\sphericalangle ADB$ ?  
*In the figure below  $AC = BC = CD$ , what is the measures of  $\sphericalangle ADB$ ?*



### Solución

Como  $\triangle ACD$  es isósceles, entonces  $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC$ . Similarmente como el  $\triangle DCB$  es isósceles entonces  $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC$ . Por otro lado

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC + \sphericalangle DBC = 180^\circ$$

Luego  $2\sphericalangle ADC + 2\sphericalangle CDB = 180^\circ$ .

Por lo tanto

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle CDB = 90^\circ$$

10. En un grupo de 25 personas hay caballeros (siempre dicen la verdad), mentirosos (siempre mienten) y alterables (alternadamente dicen la verdad y mienten). A todos les hicieron tres preguntas. A la pregunta: ¿Eres un caballero? 17 de ellos respondieron que si. A la pregunta: ¿Eres alterable?, 12 de ellos respondieron que si, y finalmente a la pregunta: ¿Eres mentiroso?, 8 de ellos dijeron que si. ¿Cuántos caballeros hay en el grupo?

*In a group of 25 persons there are knights (always tell the true), liars (always lie) and alterables (alternately tell the true and lie). Everybody was asked three question. To the question: Are you knight? 17 of them said: Yes. To the question: Are you alterable? 12 of them said yes. To the question: Are you liar?, 8 of them said yes. How many knights are in the group?*

### Solución

Sean  $c$  la cantidad de caballeros en el grupo,  $m$  la cantidad de mentirosos y  $a$  la cantidad de alterables. Note que para la primera pregunta todos los caballeros, los mentirosos y un grupo de los alterables respondieron que si. Por otro lado en la tercera pregunta unicamente pudieron responder que si un grupo de alterables. Ahora como ellos mienten de forma alternada, los que mienten en la primera pregunta tambien mienten en la tercera pregunta. Por lo tanto para la primera pregunta podemos establecer que  $c + m + 8 = 17$  y con la segunda pregunta tenemos  $m + 8 = 12$ , ya que ningun caballero dice mentiras por lo que  $m = 4$ . Así que  $c + 12 = 17$ , con lo que tenemos que  $c = 5$ .